



Proposition 4.20 (Dérivation terme à terme des séries de Fourier)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique, C^1_{loc} et continue sur $\mathbb{R}$. Si $f' \in C^1_{\text{loc}}$ et a_n, b_n sont les coefficients de Fourier de f , on a

$$\begin{aligned} Ff'(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \cdot n \left(-a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right) \\ &= \frac{f'(x-0) + f'(x+0)}{2} \end{aligned}$$

$$f \in C^1_{\text{loc}}([0, T]) \cap C^0(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (Ff)' = F(f')$$

?

$$\Rightarrow \int Ff = F \int f$$

Remarque 4.21 (suite)

(iii) Quid d'intégrer / "primitiver" la série de Fourier terme à terme?

Soyons unifs:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

(primitive

$$F \int f \stackrel{?}{=} \frac{a_0}{2} \cdot x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{-b_n \frac{T}{2\pi \cdot n} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + a_n \frac{T}{2\pi \cdot n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)}_{\text{sympa!}} \right)$$

la présence de ce terme nous dit que ce n'est pas une série de Fourier

Supposons $a_0 = 0 \rightarrow$ on a à nouveau une série de Fourier.

Soit φ une primitive de f . ($\varphi' = f$)

Pour avoir $Ff = F\varphi' = (F\varphi)'$
 φ doit vérifier les hypothèses de la proposition 4.20:

- $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique 
 - $\varphi \in C^1_{\text{loc}}([0, T])$
 - $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$
- } gratuitement, si $f \in C^1_{\text{loc}}$

Quelle hypothèse assure φ T -périodique?

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x+T) - \varphi(x) = \int_x^{x+T} \varphi'(t) dt = \int_x^{x+T} f(t) dt \\ &= \int_0^T f(t) dt = \frac{T}{2} \cdot a_0 \end{aligned}$$

Résumé: f T -périodique C^1 sur $\mathbb{R}$,

dérivée terme à terme $\rightarrow$ on a besoin $f \in C^0(\mathbb{R})$

intégrer terme à terme $\rightarrow$ on a besoin $\int_0^T f(x) dx = 0$

Exemple 4.22

(i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $|x|$ sur $[-1, 1]$
étendue par 2-périodicité.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

étendu par 2-périodicité

On a vu à l'exemple 4.6 que la série de Fourier de

f' est donnée par
$$Ff'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x)$$

Une que $\int_{-1}^1 f'(x) dx = 0$, on prend la primitive
terme à terme :

$$Ff(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \left(\frac{-\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)\pi} \right) + C$$

$$C = \frac{a_0}{2} \quad (a_0 \text{ coeff de Fourier de } f)$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 |x| dx = 1. \quad \left(\text{comparer avec} \right. \\ \left. \text{série II ex 3} \right)$$

$$\Rightarrow Ff(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x)$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

étendue par
2-périodicité

$$f \in C'_{\text{mor}}, \quad Ff(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x)$$

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \notin \mathbb{Z}$$

Voilà que $f \notin C^q(\mathbb{R})$, la proposition 4.20 ne
garantit pas qu'on peut dériver terme à terme.
Essayons quand même:

$$Ff' \stackrel{?}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi(2k+1)}{(2k+1)} \cos((2k+1) \cdot \pi \cdot x) = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \cos((2k+1)\pi x)$$

Réponse : non! on obtient un truc bizarre.

§ 😊 : Applications

Question :

$$\begin{array}{l|l} \text{trouver } u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq} \\ u'(x) - u(x) = 2 - \cos(x) + 2\sin(x) \\ \quad + \sin(2x) - 2\cos(3x) & \begin{array}{l} \text{pour } n \in \mathbb{N}, \text{ trouver } x, y \in \mathbb{R} \\ \text{tq} \\ \begin{cases} u \cdot y - x = \overline{a_n} \\ u \cdot x + y = \overline{b_n} \end{cases} \end{array} \end{array}$$

→ c'est le "même" problème → données.

Exemple 6.1 :

(i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C'est une 2π -périodique.

trouver $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique tq $u'(x) - u(x) = f(x)$

On cherche une sous forme de série de Fourier:

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \}$$

prop 4.20

$$\Rightarrow u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \{ n B_n \cos(nx) - n A_n \sin(nx) \}$$

$$\Rightarrow u'(x) - u(x) = -\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ (n B_n - A_n) \cos(nx) - (n A_n + B_n) \sin(nx) \}$$

Ainsi, si (a_n) & (b_n) sont les coeffs de Fourier de f ,

$$\text{On a } -\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ (n B_n - A_n) \cos(nx) - (n A_n + B_n) \sin(nx) \}$$

$$\Rightarrow -\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \} \quad \forall n \geq 1 \begin{cases} n B_n - A_n = a_n \\ -(n A_n + B_n) = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} uB_u - A_u = a_u \\ -(uA_u + B_u) = b_u \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} A_u &= \frac{-a_u - ub_u}{1+u^2} \\ B_u &= \frac{-b_u + ua_u}{1+u^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{-a_n - ub_n}{1+u^2} \cos(ux) + \frac{-b_n + ua_n}{1+u^2} \sin(ux) \right\}$$

Si par exemple $f(x) = 2 - \cos(x) + 2 \sin(x) + \sin(2x) - 2\cos(3x)$
 $\forall u \geq 4, \quad a_u = b_u = 0$

$$a_0 = 4, \quad a_1 = -1, \quad b_1 = 2, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 1, \quad a_3 = -2, \quad b_3 = 0$$

$$\boxed{u=0} \quad A_0 = -4$$

$$\boxed{u=1} \quad A_1 = \frac{-a_1 - b_1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad B_1 = \frac{-b_1 + a_1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{u=2} \quad A_2 = \frac{-a_2 - 2b_2}{5} = -\frac{2}{5}, \quad B_2 = \frac{-b_2 + 2a_2}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\boxed{n=3} \quad A_3 = \frac{-a_3 - 3b_3}{10} = \frac{1}{5}, \quad B_3 = \frac{-b_3 + 3a_3}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\forall n \geq 4} \quad A_n = 0, \quad B_n = 0$$

$$\Rightarrow u(x) = -2 - \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{3}{2} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(2x) - \frac{1}{5} \sin(2x) + \frac{1}{5} \cos(3x) - \frac{3}{5} \sin(3x).$$

$$u''(x) + u(-x)$$

$$u''(x) + u(x+\pi)$$

Chapitre 5: transformée de Fourier

§ 5.1 Définition & inverse:

Définition 5.1: transformée de Fourier, transformée de Fourier inverse.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux tq
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

La transformée de Fourier de f , notée $\mathcal{F}[f]$

ou $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \underbrace{e^{-i\alpha x}}_{\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)} dx$$

Vidéo du cours
2020 semaine 11
36:42 - 55:30

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux
tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\alpha)| d\alpha < +\infty$

La transformée de Fourier inverse notée $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\varphi]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
est définie par

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Remarque 5.2

Selon le livre / article / cours que vous allez voir,
la définition de $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ peut changer.

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\xi, \mu}[f](\alpha) = \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\mu \alpha x} dx = \sqrt{2\pi} \cdot \xi \cdot \tilde{\mathcal{F}}[f](\mu \alpha)$$

trafo de la ch 5.1

Pour nous, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\mu = 1$.

Dans le poly Analyse avancée pour math par pr. Dacorogna.

$\xi = 1$, $\mu = 2\pi$.

Pour chaque choix de ξ & μ , les formules changent!

Théorème 5.3 Formule d'inversion

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < +\infty$. Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\hat{f}](x) = \tilde{\mathcal{F}}^{-1} \tilde{\mathcal{F}}[f](x) \\ = f(x)$$

Exemples 5.3

(i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \gamma & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \gamma e^{-i\alpha x} dx$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\alpha} e^{-i\alpha x} \right]_{x=a}^{x=b}$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi} i\alpha} (e^{-i\alpha \cdot a} - e^{-i\alpha \cdot b}) \quad \left(\begin{array}{l} \text{voir §15.5} \\ 2) \text{ ligne} \end{array} \right)$$

$$(ii) f(x) = e^{-|x|}$$

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\alpha)} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\alpha)} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{1}{1-i\alpha} e^{x(1-i\alpha)} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{-1}{1+i\alpha} e^{-x(1+i\alpha)} \right]_{0}^{+\infty} \right)$$

Remarquons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x(1-i\alpha)} = e^x \left(\underbrace{\cos(-\alpha x) + i \sin(-\alpha x)}_{\text{borné}} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x(1-i\alpha)} = 0$$

$$\text{Ichem, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x(1+i\alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left(\frac{1+i\alpha + 1-i\alpha}{1+\alpha^2} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{1}{1+\alpha^2} \quad \left(\text{table 15.5 7) } (w=1) \right)$$